El desarrollo del sentido geométrico como una relación entre la visualización y el razonamiento configural

Germán Torregrosa
Universidad de Alicante

La demostración matemática es uno de los tópicos cuyo desarrollo se subraya en todos los diseños curriculares. Una forma de abordar la enseñanza de la demostración matemática (la prueba) ha sido a través de la geometría. Actualmente, esta situación tiene que afrontar el problema de la casi supresión de la introducción a la geometría en educación primaria y, por tanto, la dificultad de conseguir la experiencia necesaria para enfrentar su aprendizaje en la educación secundaria obligatoria. En este artículo describimos algunos hechos derivados de las investigaciones recientes sobre el aprendizaje de la geometría, con el objetivo de mostrar la utilidad de recuperar su enseñanza.

PALABRAS CLAVE
- GEOMETRÍA
- SENTIDO GEOMÉTRICO
- VISUALIZACIÓN
- RAZONAMIENTO CONFIGURAL

Profesor: En el siguiente problema, número 8, tenéis que corregir la tesis ya que solo podemos deducir que ^A es congruente con ^D.

Problema 8. En la figura siguiente (imagen 1) se verifica que el segmento AC es congruente con el segmento DB y el segmento CD es congruente con el segmento AB. Probar que ^A y ^B son ángulos congruentes.

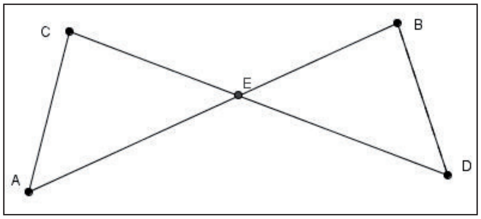


Imagen 1

Alumno: Yo lo he hecho y sí que se puede probar que los ángulos ^A y ^B son congruentes, puesto que los segmentos AB y CD se bisecan…

Profesor: Suponer eso es incorrecto, pues no se incluye en las hipótesis.

Alumno: Es que solo se pueden dar las hipótesis si los segmentos se bisecan.

Cuando se generó la situación de enseñanza anterior, el alumno «veía» evidente que los segmentos AB y CD se bisecaban. Pero este hecho que no está incluido en las tesis del problema planteado no tiene por qué cumplirse. Sin embargo, esta situación planteó un desafío al profesor: tener que *convencer* al alumno de que, con la tesis del problema, no se puede asumir que los segmentos AB y CD se bisecan.

El profesor trató de *convencer* al alumno de que las hipótesis del problema 8 no implicaban el que los segmentos AB y CD se bisecaran. Para ello planteó un nuevo problema:

Problema adicional 1

En las mismas condiciones del problema 8, demostrar que AB y CD no se bisecan necesariamente.

En la resolución de este problema, podemos llegar a demostrar que los triángulos ∴ AEC y ∴DEB son congruentes, pero no se puede afirmar que AE sea congruente con BE, ni CE congruente con DE. La prueba se apoya en añadir un segmento CB y aplicar el criterio de congruencia de triángulos a los triángulos superpuestos ∴ABC y ∴CBD, para demostrar su congruencia.

Pero la congruencia de los dos triángulos no aporta ninguna información sobre la congruencia de los segmentos CE y ED y AE y EB. Por lo tanto, esta prueba no cumple una de las funciones más evidentes: *convencer* (de que el resultado «E es punto medio» no es necesariamente cierto).

Cuando una prueba no cumple una de sus funciones, convencer, es necesario modificar la situación. Por lo tanto, se planteó un nuevo problema apoyado en el proceso de construir:

Problema adicional 2

Realizar una construcción geométrica (una configuración) wue verifique las hipótesis del problema 8 (se puede utilizar el *software* de geometría Geogebra)

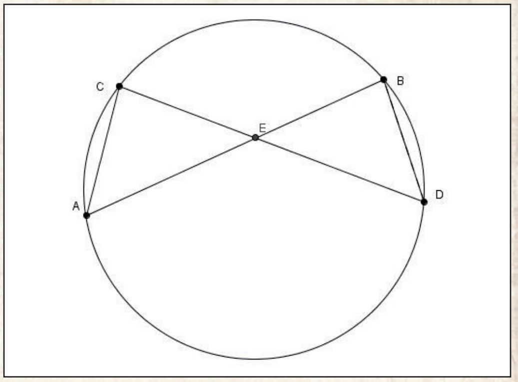


Imagen 2

Unos días antes de estudiar la congruencia, habíamos estudiado los conceptos de arco de una circunferencia y cuerda, para aprender cosas sobre los ángulos inscritos, semiinscritos y centrales. Luego a los alumnos de esta clase se les suponía un conocimiento de las relaciones entre estos conceptos. Utilizando el programa Geogebra, construimos una circunferencia (centro O, punto P) y tomamos dos puntos aleatoriamente en la circunferencia: A y D. Se marcan dos puntos B y C que determinen arcos de circunferencia de la misma medida y se unen los segmentos AC, AB, CD y DB.

Podemos justificar la construcción realizada de la siguiente forma: las cuerdas AC y DB son congruentes por abarcar arcos de igual medida. De la misma forma, AB y CD son cuerdas congruentes por abarcar arcos de la misma medida. Por tanto, la construcción realizada verifica las hipótesis del problema 8 (imagen 2).

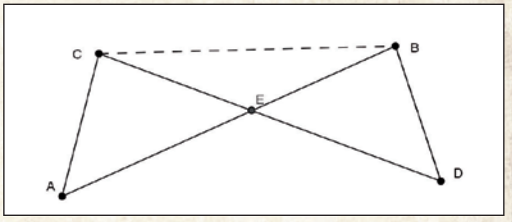


Imagen 3

Sin embargo, con la herramienta medida del programa Geogebra vemos fácilmente que la medida del segmento AE es distinta de la del segmento BE, por lo que E no es punto medio de AB. Análogamente se procede con CD y DE. Con este razonamiento apoyado en una construcción, el alumno se *convenció* de que el punto E no tenía que ser necesariamente el punto medio de AB ni de CD. Seguidamente, pasamos a resolver el problema 8 tal como estaba planteado inicialmente, pero con la tesis modificada. La prueba que realizamos fue:

Consideramos los triángulos ∴ABC y DCB (imagen 3), que verifican:

- AC ≡ DB, por hipótesis
- AB ≡ DC, por hipótesis
- CB ≡ CB, por lado común

Por lo tanto, se verifican las condiciones para poder aplicar el criterio L-L-L (lado, lado, lado) de congruencia. Podemos afirmar que los triángulos ∴ABC y ∴DCB son congruentes; de donde, por la definición de congruencia, llegamos a que ^A es congruente con ^D.

EL DESARROLLO DEL SENTIDO GEOMÉTRICO COMO RELACIÓN ENTRE LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO CONFIGURAL

La visualización, los procesos de construcción y el razonamiento configural son de gran importancia para el desarrollo del sentido geométrico. Entendemos por *razonamiento* cualquier procedimiento que nos permita inferir nueva información de informaciones previas, sean estas proporcionadas por el problema (hipótesis) o derivadas del conocimiento previo (Duval, 1998). La visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino que es también reconocida como una componente clave del razonamiento (unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo) a la resolución de problemas e incluso a la prueba. Por ello, los procesos de visualización, de construcción y de razonamiento son elementos esenciales en el desarrollo del sentido geométrico. La visualización es de gran importancia para la resolución de problemas en geometría, pero está relacionada con los procesos de razonamiento y construcción a la hora de resolver problemas de geometría (cuadro 1).

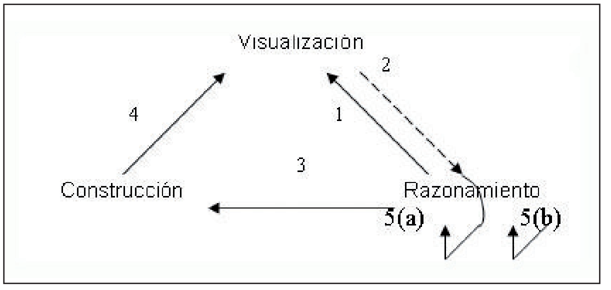
IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

La enseñanza de la geometría, desde un punto de vista cognitivo, está relacionada con el desarrollo de la capacidad de razonar, visualizar y construir elementos geométricos. La enseñanza puede intentar que los alumnos aprendan a unir una configuración (según la perciben) con los hechos geométricos, a reconocer visualmente propiedades geométricas, a interpretar dibujos en términos geométricos o a construirlos. Aprender estos procesos cognitivos capacita a los alumnos para usar los dibujos, o representaciones visuales de objetos, como ayuda en su razonamiento a

Los alumnos deberían entrenar la capacidad de identificar los elementos geométricos adecuados a cada nivel educativo

nivel teórico, así como a controlar la información que infieran de las representaciones visuales. Los alumnos deberían entrenar la capacidad de identificar los elementos geométricos adecuados a cada nivel educativo.

El centro de interés del punto de vista cognitivo es lograr la coordinación de los procesos de visualización, construcción y razonamiento que deben diferenciarse a lo largo del currículo escolar obligatorio. Podríamos plantear el problema 8 en educación primaria poniendo el énfasis en la demanda de la construcción, por ejemplo: «con dos segmentos representados por varillas (tipo mecano), realizad una construcción como se muestra en el dibujo». Los alumnos desarrollarían así una experiencia manipulativa que transferirían paulatinamente a una representación mental. A este proceso lo llamamos «cambio de anclaje».



Cuadro 1. Interacciones cognitivas involucradas en el desarrollo del sentido geométrico (Duval, 1998)

El razonamiento admite desarrollo desde edades tempranas si no pretendemos que actúen y hablen como adultos

En etapas educativas posteriores, en este mismo problema se puede cambiar el centro de interés enfatizando el razonamiento. Por ejemplo: «en la construcción descrita antes con material manipulable, identificar cuándo el punto de corte es punto medio de algún segmento». Ahora el cambio de anclaje va en sentido opuesto; desde la representación mental, donde podemos ver que la intersección de los segmentos es punto medio, tenemos que realizar esa construcción.

El razonamiento admite desarrollo desde edades tempranas si no pretendemos que actúen y hablen como adultos. El énfasis, en esta etapa inicial, que se centra en procesos de visualización y construcción, puede vincularse al desarrollo del razonamiento, sin más que solicitar a los aprendices que justifiquen la respuesta dada a la pregunta planteada, utilizando para ello cualquier recurso que pueda servirles, como el discurso en lenguaje natural, los dibujos usados, materiales de medida, recursos virtuales, etc. ◄

Referencias bibliográficas

DUVAL, R. (1998): «Geometry from a cognitive point of view», en MAMMANA, C.; VILLANI, V. (eds.): *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. Dordrecht.* Kluwer, pp. 37-52.

PRIOR, J.; TORREGROSA, G. (2013): «Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. [Configural reasoning and verification procedures in geometric context]». *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 16(3), pp. 339-368.

QUESADA, H. (2014): *Estudio de la coordinación entre los procesos cognitivos que desarrollan los estudiantes cuando resuelven problemas de Geometría*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Alicante.

TORREGROSA, G. (2013): «Razonamiento configural y enseñanza de la geometría». *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* núm. 62, pp. 49-56.

TORREGROSA, G.; CALLEJO, M.L. (2011): «Procesos matemáticos en la educación secundaria», en GOÑI, J.M. (coord.): *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*. Barcelona. Grao, pp. 29-56

TORREGROSA, G.; QUESADA, H. (2007): «Coordinación de procesos cognitivos en Geometría [Coordination of cognitive processes in geometry]». *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 10(2), pp. 275-300.

TORREGROSA, G.; QUESADA, H.; PENALVA, M.C. (2010): «Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización [Configural reasoning as coordination of visualisation process]». *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 28(3), pp. 327-340.

Dirección de contacto

Germán Torregrosa
Universidad de Alicante
german.torregrosa@ua.es

Este artículo fue solicitado por Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas en abril de 2015 y aceptado en junio de 2015 para su publicación.